IMOSL 2022 N2

Doubt Yourself

André Pinheiro

Outubro de 2023

Encontre todos os inteiros $n > 2$ tal que

$$n! \mid \prod_{\substack{p<q\leqslant n \\ p,q \text{ primos}}} (p+q)$$

Encontre todos os inteiros $n > 2$ tal que

$$n! \mid \prod_{\substack{p<q\leqslant n \\ p,q \text{ primos}}} (p+q)$$

Vamos testar com alguns valores!

Encontre todos os inteiros $n > 2$ tal que

$$n! \mid \prod_{\substack{p<q\leqslant n \\ p,q \text{ primos}}} (p+q)$$

Vamos testar com alguns valores!
$n = 3 \Rightarrow 3! \nmid (2+3)$

Encontre todos os inteiros $n > 2$ tal que

$$n! \mid \prod_{\substack{p<q\leqslant n \\ p,q \text{ primos}}} (p+q)$$

Vamos testar com alguns valores!

$n = 3 \Rightarrow 3! \nmid (2+3)$

$n = 4 \Rightarrow 4! \nmid (2+3)$

IMOSL 2022 N2

Encontre todos os inteiros $n > 2$ tal que

$$n! \mid \prod_{\substack{p<q\leqslant n \\ p,q \text{ primos}}} (p+q)$$

Vamos testar com alguns valores!

$n = 3 \Rightarrow 3! \nmid (2+3)$

$n = 4 \Rightarrow 4! \nmid (2+3)$

$n = 5 \Rightarrow 5! \nmid (2+3)(2+5)(3+5)$

Encontre todos os inteiros $n > 2$ tal que

$$n! \mid \prod_{\substack{p<q\leqslant n \\ p,q \text{ primos}}} (p+q)$$

Vamos testar com alguns valores!
$n = 3 \Rightarrow 3! \nmid (2+3)$
$n = 4 \Rightarrow 4! \nmid (2+3)$
$n = 5 \Rightarrow 5! \nmid (2+3)(2+5)(3+5)$
$n = 6 \Rightarrow 6! \nmid (2+3)(2+5)(3+5)$

Encontre todos os inteiros $n > 2$ tal que

$$n! \mid \prod_{\substack{p<q\leqslant n \\ p,q \text{ primos}}} (p+q)$$

Vamos testar com alguns valores!

$n = 3 \Rightarrow 3! \nmid (2+3)$

$n = 4 \Rightarrow 4! \nmid (2+3)$

$n = 5 \Rightarrow 5! \nmid (2+3)(2+5)(3+5)$

$n = 6 \Rightarrow 6! \nmid (2+3)(2+5)(3+5)$

$n = 7 \Rightarrow 7! \mid (2+3)(2+5)(2+7)(3+5)(3+7)(5+7)$

Encontre todos os inteiros $n > 2$ tal que

$$n! \mid \prod_{\substack{p<q\leqslant n \\ p,q \text{ primos}}} (p+q)$$

Vamos testar com alguns valores!

$n = 3 \Rightarrow 3! \nmid (2+3)$

$n = 4 \Rightarrow 4! \nmid (2+3)$

$n = 5 \Rightarrow 5! \nmid (2+3)(2+5)(3+5)$

$n = 6 \Rightarrow 6! \nmid (2+3)(2+5)(3+5)$

$n = 7 \Rightarrow 7! \mid (2+3)(2+5)(2+7)(3+5)(3+7)(5+7)$

...

Encontre todos os inteiros $n > 2$ tal que

$$n! \mid \prod_{\substack{p<q\leqslant n \\ p,q \text{ primos}}} (p+q)$$

Vamos testar com alguns valores!

$n = 3 \Rightarrow 3! \nmid (2+3)$

$n = 4 \Rightarrow 4! \nmid (2+3)$

$n = 5 \Rightarrow 5! \nmid (2+3)(2+5)(3+5)$

$n = 6 \Rightarrow 6! \nmid (2+3)(2+5)(3+5)$

$n = 7 \Rightarrow 7! \mid (2+3)(2+5)(2+7)(3+5)(3+7)(5+7)$

...

Testando com mais alguns valores, parece que o 7 é o único que funciona.

Solução

Vamos analisar os resultados quando n é primo!

$n = 3 \Rightarrow 3! \nmid 5$

Solução

Vamos analisar os resultados quando n é primo!

$n = 3 \Rightarrow 3! \nmid 5$
$n = 5 \Rightarrow 5! \nmid 5.7.8$

Solução

Vamos analisar os resultados quando n é primo!

$n = 3 \Rightarrow 3! \nmid 5$
$n = 5 \Rightarrow 5! \nmid 5.7.8$
$n = 7 \Rightarrow 7! \mid 5.7.9.8.10.12$

Solução

Vamos analisar os resultados quando n é primo!

$n = 3 \Rightarrow 3! \nmid 5$
$n = 5 \Rightarrow 5! \nmid 5.7.8$
$n = 7 \Rightarrow 7! \mid 5.7.9.8.10.12$
$n = 11 \Rightarrow 11! \nmid 5.7.9.13.8.10.14.12.16.18$

Solução

Vamos analisar os resultados quando n é primo!

$n = 3 \Rightarrow 3! \nmid 5$

$n = 5 \Rightarrow 5! \nmid 5.7.8$

$n = 7 \Rightarrow 7! \mid 5.7.9.8.10.12$

$n = 11 \Rightarrow 11! \nmid 5.7.9.13.8.10.14.12.16.18$

$n = 13 \Rightarrow 13! \nmid 5.7.9.13.15.8.10.14.16.12.16.18.18.20.24$

Vamos analisar os resultados quando n é primo!

$n = 3 \Rightarrow 3! \nmid 5$
$n = 5 \Rightarrow 5! \nmid 5.7.8$
$n = 7 \Rightarrow 7! \mid 5.7.9.8.10.12$
$n = 11 \Rightarrow 11! \nmid 5.7.9.13.8.10.14.12.16.18$
$n = 13 \Rightarrow 13! \nmid 5.7.9.13.15.8.10.14.16.12.16.18.18.20.24$

Repare que para $n = 11$, o 11 não divide o numerador, então podemos tentar descobrir quando n divide o numerador.

Vamos analisar os resultados quando n é primo!

$n = 3 \Rightarrow 3! \nmid 5$
$n = 5 \Rightarrow 5! \nmid 5.7.8$
$n = 7 \Rightarrow 7! \mid 5.7.9.8.10.12$
$n = 11 \Rightarrow 11! \nmid 5.7.9.13.8.10.14.12.16.18$
$n = 13 \Rightarrow 13! \nmid 5.7.9.13.15.8.10.14.16.12.16.18.18.20.24$

Repare que para $n = 11$, o 11 não divide o numerador, então podemos tentar descobrir quando n divide o numerador.

Como $p < q \leqslant n$ em que p, q são primos, então $p + q < 2n$. Ou seja $p + q = n$. Ora, isto acontece se $p = 2$, logo $2 + p = n \Rightarrow 2 = n - p$.

Solução

Vamos analisar os resultados quando n é primo!

$n = 3 \Rightarrow 3! \nmid 5$
$n = 5 \Rightarrow 5! \nmid 5.7.8$
$n = 7 \Rightarrow 7! \mid 5.7.9.8.10.12$
$n = 11 \Rightarrow 11! \nmid 5.7.9.13.8.10.14.12.16.18$
$n = 13 \Rightarrow 13! \nmid 5.7.9.13.15.8.10.14.16.12.16.18.18.20.24$

Repare que para $n = 11$, o 11 não divide o numerador, então podemos tentar descobrir quando n divide o numerador.

Como $p < q \leqslant n$ em que p, q são primos, então $p + q < 2n$. Ou seja $p + q = n$. Ora, isto acontece se $p = 2$, logo $2 + p = n \Rightarrow 2 = n - p$.

Então temos o seguinte lema.

Solução

Lema 1

Dados $r > s$ primos consecutivos com $s > 3$, temos

$$r \mid \prod_{\substack{p<q\leqslant r \\ p,q \text{ primos}}} (p+q) \Rightarrow 2+s=r$$

Solução

Lema 1

Dados $r > s$ primos consecutivos com $s > 3$, temos

$$r \mid \prod_{\substack{p<q\leqslant r \\ p,q \text{ primos}}} (p+q) \Rightarrow 2 + s = r$$

Prova:

Temos $p < q \leqslant r$ com p, q primos $\Rightarrow p + q < 2r \Rightarrow p + q = r$.

Solução

Lema 1

Dados $r > s$ primos consecutivos com $s > 3$, temos

$$r \mid \prod_{\substack{p<q\leqslant r \\ p,q \text{ primos}}} (p+q) \Rightarrow 2+s=r$$

Prova:

Temos $p < q \leqslant r$ com p, q primos $\Rightarrow p+q < 2r \Rightarrow p+q = r$.

Se $p > 2$, $p+q$ é par. Portanto $p = 2$ e $2+q = r$ Isto apenas é possível se n e q forem primos consecutivos.

Solução

Lema 1

Dados $r > s$ primos consecutivos com $s > 3$, temos

$$r \mid \prod_{\substack{p<q\leqslant r \\ p,q \text{ primos}}} (p+q) \Rightarrow 2+s=r$$

Prova:

Temos $p < q \leqslant r$ com p, q primos $\Rightarrow p+q < 2r \Rightarrow p+q=r$.

Se $p > 2$, $p+q$ é par. Portanto $p=2$ e $2+q=r$ Isto apenas é possível se n e q forem primos consecutivos.

Logo, $q=s$ e assim $2+s=r$.

Solução

O contra-recíproco do lema 1 diz-nos que

$$2 < r - s \Rightarrow r \nmid \prod_{\substack{p<q\leqslant r \\ p,q \text{ primos}}} (p+q)$$

Solução

O contra-recíproco do lema 1 diz-nos que

$$2 < r - s \Rightarrow r \nmid \prod_{\substack{p<q\leqslant r \\ p,q \text{ primos}}} (p+q)$$

Seria bom provar que se $2 = r - s$ e $s! \nmid \prod^s (p+q)$, então $r! \nmid \prod^r (p+q)$, pois assim garantimos que os restantes primos não satisfazem o nosso problema.

O contra-recíproco do lema 1 diz-nos que

$$2 < r - s \Rightarrow r \nmid \prod_{\substack{p<q\leqslant r \\ p,q \text{ primos}}} (p+q)$$

Seria bom provar que se $2 = r - s$ e $s! \nmid \prod^s (p+q)$, então $r! \nmid \prod^r (p+q)$, pois assim garantimos que os restantes primos não satisfazem o nosso problema.

Assim, vamos provar o seguinte lema.

Lema 2

Dados $r > s$ primos consecutivos com $s > 5$ e $2 = r - s$, temos

$$s \nmid \prod_{\substack{p<q\leqslant s \\ p,q \text{ primos}}} (p+q) \Rightarrow r! \nmid \prod_{\substack{p<q\leqslant r \\ p,q \text{ primos}}} (p+q)$$

Lema 2

Dados $r > s$ primos consecutivos com $s > 5$ e $2 = r - s$, temos

$$s \nmid \prod_{\substack{p<q\leqslant s \\ p,q \text{ primos}}} (p+q) \Rightarrow r! \nmid \prod_{\substack{p<q\leqslant r \\ p,q \text{ primos}}} (p+q)$$

Prova.

Repare que

$$r! = (2+s)(1+s)s!$$

Solução

Lema 2

Dados $r > s$ primos consecutivos com $s > 5$ e $2 = r - s$, temos

$$s \nmid \prod_{\substack{p<q\leqslant s \\ p,q \text{ primos}}} (p+q) \Rightarrow r! \nmid \prod_{\substack{p<q\leqslant r \\ p,q \text{ primos}}} (p+q)$$

Prova.

Repare que

$$r! = (2+s)(1+s)s!$$

e

$$\prod_{\substack{p<q\leqslant r \\ p,q \text{ primos}}} (p+q) = (2+r)(3+r)(5+r)...(s+r) \prod_{\substack{p<q\leqslant s \\ p,q \text{ primos}}} (p+q)$$

Temos então que

$$(2+s) \mid \prod_{\substack{p<q\leqslant s \\ p,q \text{ primos}}} (p+q)$$

e

Temos então que

$$(2+s) \mid \prod_{\substack{p<q\leqslant s \\ p,q \text{ primos}}} (p+q)$$

e

$$\prod_{\substack{p<q\leqslant r \\ p,q \text{ primos}}} (p+q) = (2+r)(3+r)(5+r)...(s+r) \prod_{\substack{p<q\leqslant s \\ p,q \text{ primos}}} (p+q) =$$

Temos então que

$$(2+s) \mid \prod_{\substack{p<q\leqslant s \\ p,q \text{ primos}}} (p+q)$$

e

$$\prod_{\substack{p<q\leqslant r \\ p,q \text{ primos}}} (p+q) = (2+r)(3+r)(5+r)...(s+r) \prod_{\substack{p<q\leqslant s \\ p,q \text{ primos}}} (p+q) =$$

$$= (4+s)(5+s)(7+s)...(s+2+s) \prod_{\substack{p<q\leqslant s \\ p,q \text{ primos}}} (p+q) =$$

Solução

Temos então que

$$(2+s) \mid \prod_{\substack{p<q\leqslant s \\ p,q \text{ primos}}} (p+q)$$

e

$$\prod_{\substack{p<q\leqslant r \\ p,q \text{ primos}}} (p+q) = (2+r)(3+r)(5+r)...(s+r) \prod_{\substack{p<q\leqslant s \\ p,q \text{ primos}}} (p+q) =$$

$$= (4+s)(5+s)(7+s)...(s+2+s) \prod_{\substack{p<q\leqslant s \\ p,q \text{ primos}}} (p+q) =$$

$$= (4+s)(5+s)(7+s)...2(s+1) \prod_{\substack{p<q\leqslant s \\ p,q \text{ primos}}} (p+q)$$

Solução

Ou seja,

$$(s+1) \mid \prod_{\substack{p<q\leqslant r \\ p,q \text{ primos}}} (p+q)$$

Ou seja,

$$(s+1) \mid \prod_{\substack{p<q\leqslant r\\ p,q \text{ primos}}} (p+q)$$

Queremos provar que

$$s! \nmid \frac{2\prod_{\substack{p<q\leqslant s\\ p,q \text{ primos}}} (p+q)}{s+2}(2+r)(3+r)(5+r)...(x+r),$$

em que x e s são primos consecutivos.

Solução

Ou seja,

$$(s+1) \mid \prod_{\substack{p<q\leqslant r \\ p,q \text{ primos}}} (p+q)$$

Queremos provar que

$$s! \nmid \frac{2\prod_{\substack{p<q\leqslant s \\ p,q \text{ primos}}} (p+q)}{s+2}(2+r)(3+r)(5+r)...(x+r),$$

em que x e s são primos consecutivos.

Para isso, vamos provar que $s \nmid (2+r)(3+r)(5+r)...(x+r)$.

Solução

Suponhamos que não, isto é, que $s \mid (2+r)(3+r)(5+r)...(x+r)$.

Solução

Suponhamos que não, isto é, que $s \mid (2+r)(3+r)(5+r)...(x+r)$.

Então temos,

$$s \mid (4+s)(5+s)(7+s)...(x+2+s).$$

Solução

Suponhamos que não, isto é, que $s \mid (2+r)(3+r)(5+r)...(x+r)$.

Então temos,

$$s \mid (4+s)(5+s)(7+s)...(x+2+s).$$

Para que a divisão seja possível, $x+2+s=2s$, pelo que $x<s$. Sendo assim, temos

$$x+2+s=2s \Rightarrow x+2=s.$$

Solução

Suponhamos que não, isto é, que $s \mid (2+r)(3+r)(5+r)...(x+r)$.

Então temos,

$$s \mid (4+s)(5+s)(7+s)...(x+2+s).$$

Para que a divisão seja possível, $x+2+s = 2s$, pelo que $x < s$. Sendo assim, temos

$$x+2+s = 2s \Rightarrow x+2 = s.$$

Então x é múltiplo de 3 e não é primo, pelo que $s+2 = r$ e $s > 5$. Ora, isto é uma contradição, pois por hipótese x é primo.

Solução

Suponhamos que não, isto é, que $s \mid (2+r)(3+r)(5+r)...(x+r)$.

Então temos,

$$s \mid (4+s)(5+s)(7+s)...(x+2+s).$$

Para que a divisão seja possível, $x+2+s=2s$, pelo que $x<s$. Sendo assim, temos

$$x+2+s=2s \Rightarrow x+2=s.$$

Então x é múltiplo de 3 e não é primo, pelo que $s+2=r$ e $s>5$. Ora, isto é uma contradição, pois por hipótese x é primo.

Logo, $s \nmid (2+r)(3+r)(5+r)...(x+r)$ e o resultado do lema segue. ∎

Solução

Pelo lema 1, se dois primos $p > q$ forem tais que $p - q > 2$, então p não satisfaz o problema.

Pelo lema 1, se dois primos $p > q$ forem tais que $p - q > 2$, então p não satisfaz o problema.

Pelo lema 2, se dois primos $p > q$ forem tais que $p - q = 2$ e q não satisfaz o problema, então p não satisfaz o problema.

Solução

Pelo lema 1, se dois primos $p > q$ forem tais que $p - q > 2$, então p não satisfaz o problema.

Pelo lema 2, se dois primos $p > q$ forem tais que $p - q = 2$ e q não satisfaz o problema, então p não satisfaz o problema.

Dado que não existem $p > q > s > 3$ primos tais que $p = q + 2$ e $q = s + 2$, então podemos concluir que para todo primo $n > 7$, n não satisfaz o problema.

Solução

Pelo lema 1, se dois primos $p > q$ forem tais que $p - q > 2$, então p não satisfaz o problema.

Pelo lema 2, se dois primos $p > q$ forem tais que $p - q = 2$ e q não satisfaz o problema, então p não satisfaz o problema.

Dado que não existem $p > q > s > 3$ primos tais que $p = q + 2$ e $q = s + 2$, então podemos concluir que para todo primo $n > 7$, n não satisfaz o problema.

$$7, 11, ..., p_i, p_i + 1, p_{i+1}, ..., p_{i+2}, ..., p_{i+3}, ...$$

Solução

Pelo lema 1, se dois primos $p > q$ forem tais que $p - q > 2$, então p não satisfaz o problema.

Pelo lema 2, se dois primos $p > q$ forem tais que $p - q = 2$ e q não satisfaz o problema, então p não satisfaz o problema.

Dado que não existem $p > q > s > 3$ primos tais que $p = q + 2$ e $q = s + 2$, então podemos concluir que para todo primo $n > 7$, n não satisfaz o problema.

$$7, 11, ..., p_i, p_i + 1, p_{i+1}, ..., p_{i+2}, ..., p_{i+3}, ...$$

Falta provar que todo $n > 7$ inteiro não satisfaz o problema.

Solução

Seja $p > q > 7$ primos consecutivos e o conjunto $N = \{p, p + 1, ..., q - 2, q - 1\}$.

Solução

Seja $p > q > 7$ primos consecutivos e o conjunto
$N = \{p, p+1, ..., q-2, q-1\}$.

Repare que o produtório no numerador é o mesmo para todo $n \in N$, pelo que p é o maior primo menor que n. Então se p não satisfaz o problema, então para todo $n \in N$, n não satisfaz o problema.

Solução

Seja $p > q > 7$ primos consecutivos e o conjunto $N = \{p, p+1, ..., q-2, q-1\}$.

Repare que o produtório no numerador é o mesmo para todo $n \in N$, pelo que p é o maior primo menor que n. Então se p não satisfaz o problema, então para todo $n \in N$, n não satisfaz o problema.

Portanto, para todo $n > 7$ inteiro, n não satisfaz o problema.

Seja $p > q > 7$ primos consecutivos e o conjunto $N = \{p, p+1, ..., q-2, q-1\}$.

Repare que o produtório no numerador é o mesmo para todo $n \in N$, pelo que p é o maior primo menor que n. Então se p não satisfaz o problema, então para todo $n \in N$, n não satisfaz o problema.

Portanto, para todo $n > 7$ inteiro, n não satisfaz o problema.

Logo, a única solução para o problema é $n = 7$.